



INVALSI Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione

Ente di Diritto Pubblico Decreto Legislativo 286/2004

QUADRO DI RIFERIMENTO DELLE PROVE DI INVALSI MATEMATICA



1. A chi si rivolge il Quadro di Riferimento.....	2
2. Le finalità istituzionali e il disegno della rilevazione	4
3. Quale matematica: Indicazioni nazionali e Linee Guida	6
3.1 Le Indicazioni per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione.....	6
3.2. Le Indicazioni per la scuola secondaria di secondo grado.....	8
3.3. La continuità nelle indicazioni per i curricula e nella costruzione delle prove INVALSI	9
3.4. Le prove INVALSI e le competenze matematiche.....	11
4. La struttura delle prove	14
4.1 Le caratteristiche generali delle prove e le tipologie delle domande.....	14
4.2 La produzione delle domande e delle prove	16
5. Le prove INVALSI nel panorama internazionale.....	20
Allegato A - Traguardi e Dimensioni.....	23
Allegato B - Esempi di domande	29

1. A chi si rivolge il Quadro di Riferimento.

Questo documento presenta il Quadro di Riferimento (QdR) per la costruzione delle prove di matematica per il sistema delle Rilevazioni Nazionali dell'INVALSI.

Il QdR esplicita i principali punti di riferimento concettuali, i collegamenti con le indicazioni di legge, le idee chiave che guidano la progettazione delle prove e alcune informazioni sull'evoluzione degli strumenti messi in campo negli anni per migliorare il sistema delle Rilevazioni Nazionali.

A questo proposito va ricordato che si tratta di un quadro di riferimento per la valutazione e non per i curricoli, e quindi va collegato al quadro generale nel quale sono formulate le indicazioni per i curricoli della scuola italiana, che a loro volta hanno subito in questi anni un'evoluzione che le ha portate all'attuale sistemazione organica.

Il QdR, coerentemente con il sistema delle Indicazioni di legge che attraverso vari documenti orientano i curricoli, è pensato in un'ottica di stretta continuità tra le prove per le classi del primo ciclo di istruzione (classi seconda e quinta primaria e terza secondaria di primo grado) e le prove per le classi del secondo ciclo (classi seconda e quinta della scuola secondaria di secondo grado).

Il QdR è pensato, in primo luogo, per aiutare gli attori del sistema scolastico (insegnanti, dirigenti, famiglie) a interpretare i risultati ottenuti dalle singole scuole o dalle singole classi nelle prove delle Rilevazioni Nazionali. La comparazione dei risultati delle proprie classi o della propria istituzione scolastica con gli esiti complessivi delle prove, interpretati alla luce della conoscenza del contesto specifico in cui la propria scuola opera, può servire per individuare i punti di forza e di debolezza del percorso effettivamente realizzato in classe e delle scelte didattiche effettuate; può inoltre aiutare il coordinamento della progettazione didattica all'interno delle singole istituzioni scolastiche.

Il QdR può essere adoperato dai responsabili ai diversi livelli (Ministero dell'Istruzione, Uffici Scolastici Regionali, Dirigenti scolastici) come strumento per interpretare i risultati del sistema nel suo complesso, per poter adottare opportune strategie di intervento, per esempio relativamente alla predisposizione di attività particolari di recupero o rafforzamento per gli studenti o di piani di formazione in servizio per i docenti.

Il QdR, inoltre, può offrire agli studenti e alle famiglie informazioni utili per capire il significato della valutazione come momento cruciale del percorso scolastico e come momento di verifica del sistema.

Il QdR si rivolge infine alle persone che propongono i quesiti e ai gruppi di lavoro che a diversi livelli li elaborano, ne seguono i pretest sul campo e sulla base dei risultati di essi compongono le prove. Indica i vari aspetti dell'apprendimento da valutare e stabilisce un equilibrio tra i diversi ambiti. È quindi uno strumento fondamentale nella fase preparatoria delle prove.

Tutte queste osservazioni portano a riflettere sull'importante effetto di ricaduta che il complesso delle prove delle Rilevazioni Nazionali ha sull'intero sistema scolastico e sulle sue



scelte didattiche. È proprio in questo senso che un'attenta analisi dei risultati delle prove somministrate potrà contribuire a fornire una guida per il miglioramento dell'offerta del sistema di istruzione nel suo complesso e di ogni istituzione scolastica.

Fino al 2017 le prove sono state tutte somministrate in formato cartaceo, mentre dal 2018 le prove della scuola secondaria di primo e secondo grado sono *computer based* (identificate per brevità dall'acronimo CBT, computer based test) come previsto dalla nuova normativa. Aspetti specifici della prova CBT della classe quinta della scuola secondaria di secondo grado sono contenuti in un apposito documento: "*La prova INVALSI di Matematica al termine del secondo ciclo di istruzione*", disponibile sul sito dell'INVALSI (https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/Grado_13_Prova_Matematica.pdf).



2. Le finalità istituzionali e il disegno della rilevazione¹

Il Decreto legislativo n. 62 del 13 aprile 2017 (D. Lgs. n. 62/2017) ha introdotto importanti cambiamenti nella valutazione degli studenti, coinvolgendo anche le prove INVALSI e modificandone in parte l'impianto e la relazione con gli esami di Stato conclusivi del primo e del secondo ciclo d'istruzione.

Dall'anno scolastico 2017-18 la prova dell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado (Grado 8²) non fa più parte dell'esame di Stato superando il problema dell'incidenza del suo esito sul voto finale dell'allievo. Lo svolgimento della prova avviene nel mese di aprile ed è requisito per l'ammissione all'esame di Stato. Il suo esito è espresso mediante un descrittore qualitativo su una scala crescente di risultato (da livello 1 a livello 5)³ che è riportato nella certificazione delle competenze dello studente. Si tratta di un'innovazione che consente di descrivere il risultato della prova di Matematica in termini di competenze raggiunte dal singolo allievo, con una descrizione di che cosa è in grado di fare rispetto ai Traguardi delle Indicazioni nazionali⁴. Questa soluzione consente alle scuole, agli studenti e alle famiglie di conoscere in modo diretto e comparabile qual è il livello di competenza raggiunto da ciascuno studente. Ciò avviene, però, senza creare interferenze con la valutazione di scuola che deve tenere conto di elementi che non sono osservabili mediante una prova standardizzata.

L'impostazione normativa della prova INVALSI di Matematica per l'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado (Grado 13) è del tutto simile a quello della terza secondaria di primo grado. La prova di Matematica del Grado 13 è introdotta a partire dall'a.s. 2018-19.

Il D. Lgs. n. 62/2017 stabilisce che le prove della scuola secondaria (Grado 8, 10 e 13) sono *computer based* (CBT). La modalità di svolgimento determina anche un cambiamento dell'impianto delle prove: non più lineari, cioè formate dalle stesse domande per tutti gli studenti, ma composte da un certo numero di quesiti differenti provenienti da un'unica banca di domande. Ogni prova formata in questo modo condivide con le altre la stessa difficoltà media e le stesse caratteristiche di contenuti e di tipologia di quesiti. Questo disegno consente inoltre di introdurre, entro certi limiti, degli elementi di differenziazione, pur mantenendo l'unitarietà della prova. In tal modo è possibile introdurre quesiti maggiormente appropriati per alcune filiere specifiche dell'istruzione e della formazione secondaria di secondo grado, senza però perdere il vantaggio di risultati forniti su una scala unica, quindi direttamente comparabili.

L'art. 4 del D. Lgs. n. 62/2017 conferma inoltre la presenza della prova di Matematica nelle classi seconda e quinta primaria, realizzate in coerenza con le Indicazioni nazionali per il curriculum.

¹ Per una visione completa della normativa di riferimento si può fare riferimento a questo link

<http://www.INVALSI.it/INVALSI/istituto.php?page=normativa>

² In questo documento, seguendo l'uso internazionale, si indica con "grado" (*grade*) l'anno di scolarità a partire dalla prima classe della scuola primaria (grado 1)

³ I descrittori analitici e sintetici sono scaricabili da: https://invalsi-areaprove.cineca.it/index.php?get=static&pag=Certificazione_competenze_Scuola_sec_primo_grado

⁴ http://www.indicazioninazionali.it/documenti/Indicazioni_nazionali/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

La Figura 1 schematizza il disegno delle rilevazioni INVALSI, a partire dalla loro introduzione avvenuta in forma ordinaria dall'a.s. 2007-08.

	A.S. 2007-08	A.S. 2008-09	A.S. 2009-10	A.S. 2010-11	A.S. 2011-12	A.S. 2012-13	A.S. 2013-14	A.S. 2014-15	A.S. 2015-16	A.S. 2016-17	A.S. 2017-18	A.S. 2018-19
GRADO 2												
GRADO 5												
GRADO 6												
GRADO 8											CBT	CBT
GRADO 10											CBT	CBT
GRADO 13												CBT

Figura 1: Il disegno delle rilevazioni INVALSI

Infine, ma non da ultimo, il D. Lgs. 62/2017 richiama esplicitamente il D.P.R. 80/2013, istitutivo del Sistema Nazionale di Valutazione, ribadendo il ruolo fondamentale delle prove nel più ampio contesto dell'intero processo di valutazione e autovalutazione delle scuole e del sistema educativo.

L'inquadramento normativo delle prove INVALSI, così come esse sono state recentemente ridisegnate, permette di cogliere l'importante ruolo attribuito dal legislatore alla rilevazione delle competenze di base, tra le quali quelle matematiche rivestono un ruolo fondamentale.



3. Quale matematica: Indicazioni nazionali e Linee Guida

Le Indicazioni nazionali di ogni grado scolastico richiamano più volte, più o meno esplicitamente, il fatto che la Matematica, come disciplina, coinvolge due aspetti, strettamente collegati tra loro:

- uno rivolto alla modellizzazione e alle applicazioni per leggere, interpretare la realtà e risolvere problemi della vita di tutti i giorni;
- l'altro rivolto allo sviluppo interno, alla riflessione e alle speculazioni sugli stessi prodotti culturali dell'attività matematica.

Inoltre, nei vari gradi scolari compare il suggerimento di far riferimento a campi di esperienza degli studenti per dare significato agli oggetti matematici.

Di tutto ciò è quindi necessario tenere conto nella didattica della Matematica e nella valutazione dei processi di insegnamento-apprendimento a ogni grado scolastico.

3.1 Le Indicazioni per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione

Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* del 2012 e nelle *Indicazioni nazionali e nuovi scenari* del 2017⁵ si dedica molta attenzione alla Matematica come strumento per operare nella realtà e si invita esplicitamente a evitare di ridurre le conoscenze matematiche a un insieme di regole da applicare per risolvere problemi standardizzati.

Per quel che riguarda le *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* del 2012, nel paragrafo *La conoscenza del mondo*, specifico per la scuola dell'infanzia, si ha un esempio di come il riferimento a esperienze concrete possa costituire un veicolo privilegiato per la formazione dei concetti matematici di base: "I bambini esplorano continuamente la realtà e imparano a riflettere sulle proprie esperienze descrivendole, rappresentandole, riorganizzandole con diversi criteri. Pongono così le basi per la successiva elaborazione di concetti scientifici e matematici che verranno proposti nella scuola primaria".

Nella sezione *Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione* si legge, in relazione alle competenze che deve possedere uno studente che completa il primo ciclo di istruzione: "Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il possesso di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche".

Nella sezione dedicata alle differenti discipline, alla voce *Matematica*, si scrive "Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il «pensare» e il «fare» e

⁵ <http://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/>



offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri”.

Inoltre, sempre nella stessa sezione, si dice che al termine del primo ciclo di istruzione “è di estrema importanza lo sviluppo di un’adeguata visione della matematica non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell’uomo”.

Più avanti, nei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria* è scritto che lo studente “Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà”, affermazione che viene ripetuta, rafforzandola, nei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado*: “Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà”.

Per quel che riguarda le *Indicazioni nazionali e nuovi scenari* del 2017, nel paragrafo *Il pensiero matematico* si pone in particolare l’attenzione sulla statistica “come disciplina che si serve della matematica per spiegare fenomeni e tendenze della natura, del mondo e della società [e che] può essere utilizzata [...] per avvicinare gli alunni alla matematica e alla sua potente capacità di spiegare e interpretare il mondo, con spirito critico e con il supporto di dati alle opinioni”. Nello stesso paragrafo, più avanti, si fa riferimento alla matematica come disciplina che permette di sviluppare competenze trasversali, in particolare quelle argomentative che inevitabilmente richiedono il riferimento, sempre più consapevole ed esplicito, con il progredire del percorso scolastico dello studente, a una dimensione teorica della disciplina: “Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all’ascolto attento e critico dell’altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare l’educazione all’argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d’informazioni false o incontrollate”.

Infine le *Indicazioni nazionali e nuovi scenari* richiamano l’importanza del Laboratorio di Matematica, già esplicitamente dichiarata nelle *Indicazioni* del 2012: “In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio [...] come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, [...] costruisce significati”. Le Indicazioni suggeriscono quindi che il Laboratorio sia un ambiente di insegnamento – apprendimento in cui possano concretizzarsi, a scuola, i due aspetti della Matematica come disciplina, quello rivolto alle applicazioni e quello più attento agli sviluppi teorici.



3.2. Le Indicazioni per la scuola secondaria di secondo grado

Anche nelle *Indicazioni nazionali per i Licei* i diversi aspetti legati alla matematica e alle sue applicazioni sono chiaramente ed esplicitamente richiamati nella sezione *Linee generali e competenze*: “lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico”. Analogamente, nelle *Linee Guida per gli Istituti tecnici e professionali*, nel paragrafo relativo al primo biennio, *Il raccordo tra l'area di istruzione generale e l'area di indirizzo*, si accenna a questi aspetti, pur se in modo non del tutto esplicito: “L'asse matematico garantisce l'acquisizione di saperi e competenze che pongono lo studente nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo. Al termine dell'obbligo d'istruzione, gli studenti acquisiscono le abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie ed altrui”. Più avanti, nella declinazione degli obiettivi specifici disciplinari del biennio, alla sezione *Matematica*, si precisa: “Nella scelta dei problemi, è opportuno fare riferimento sia ad aspetti interni alla matematica, sia ad aspetti specifici collegati ad ambiti scientifici (economico, sociale, tecnologico) o, più in generale, al mondo reale”.

Anche nel triennio delle *Linee Guida per gli Istituti tecnici e professionali*, nel paragrafo *Il raccordo tra le discipline dell'area generale e delle aree di indirizzo*, si legge: “Le competenze matematico-scientifiche contribuiscono alla comprensione critica della dimensione teorico-culturale dei saperi e delle conoscenze proprie del pensiero matematico e scientifico. Lo studio della matematica permette di utilizzare linguaggi specifici per la rappresentazione e soluzione di problemi scientifici, economici e tecnologici e stimola gli studenti a individuare le interconnessioni tra i saperi in quanto permette di riconoscere i momenti significativi nella storia del pensiero matematico”. Analogamente, nella declinazione degli obiettivi specifici disciplinari del triennio, alla sezione *Matematica*, si precisa: “Il docente di Matematica concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica; possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate; collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche”.

In tutti gli ordini e i gradi di istruzione vi è quindi un riferimento più o meno esplicito a considerare i campi di esperienza degli studenti che possono coinvolgere, soprattutto con l'avanzare dei gradi di istruzione, anche contesti scolastici e professionali, come occasione per la costruzione di significato degli oggetti matematici e, al tempo stesso, a considerare la matematica sia come strumento utile nella vita concreta sia come un prodotto culturale che riguarda le speculazioni più libere dello spirito umano. Di conseguenza emerge un'immagine della disciplina ben lontana da quella di insieme di tecniche e regole fini a se stesse o utili esclusivamente a successivi sviluppi interni. Le indicazioni curriculari invitano chi insegna ad aiutare gli studenti ad acquisire consapevolezza dell'importanza delle relazioni tra Matematica



e realtà, in modo che emerga un'immagine della Matematica come disciplina non solo dotata di forte unità, ma anche come rete di prodotti culturali generati da un'attività dell'intelletto umano in ogni tempo e in ogni civiltà.

3.3. La continuità nelle indicazioni per i curricoli e nella costruzione delle prove

INVALSI

Questo quadro di riferimento, all'interno del quale si esplicitano le indicazioni di legge per tutti i gradi scolastici, è alla base del disegno delle prove del sistema delle Rilevazioni Nazionali dell'INVALSI e ne costituisce il fondamento concettuale e operativo.

Oltre alle considerazioni generali riportate nei precedenti paragrafi, le diverse indicazioni per i curricoli entrano, più o meno esplicitamente, nei dettagli dei contenuti irrinunciabili e delle competenze essenziali che gli studenti devono conseguire in Matematica al termine dei vari cicli scolastici. Talvolta le finalità dell'insegnamento-apprendimento della Matematica sono dichiarate esplicitamente per punti, in termini di obiettivi per l'apprendimento, di conoscenze e abilità o di traguardi per lo sviluppo delle competenze; altre volte, come nelle *Indicazioni per i licei*, sono presenti all'interno di un discorso narrativo, anche se articolato e puntuale.

Ciò che, però, caratterizza tutti i diversi gradi scolari, dalla scuola primaria alla scuola secondaria, anche se, ovviamente, con diversa enfasi e dettaglio, sono i seguenti punti:

- i quattro ambiti di contenuto (che solo nella scuola primaria sono tre, in quanto gli ambiti *Relazioni e funzioni* e *Dati e previsioni* concorrono a comporre l'unico ambito *Relazioni, dati e previsioni*), talvolta etichettati con differenti denominazioni, (per esempio l'ambito *Numeri* del primo ciclo diventa, nelle *Linee guida* e nelle *Indicazioni per i licei*, *Aritmetica e algebra*, così come *Spazio e figure* diventa *Geometria*), ma chiaramente individuabili come campi di contenuto specifici;
- la necessità di progettare percorsi che, nel conseguimento dei contenuti irrinunciabili, non perdano mai di vista lo sviluppo di competenze il cui raggiungimento è ineludibile per il possesso di quella cultura matematica che aiuti a partecipare in modo informato, consapevole e critico alle scelte sempre più delicate che la vita pubblica impone:
 - rappresentare oggetti matematici e relazioni fra essi, operare con queste rappresentazioni e passare dall'una all'altra ove opportuno;
 - argomentare utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere, prestando attenzione agli artifici retorici utili a avvalorare e spiegare le proprie argomentazioni;
 - porsi e risolvere problemi; utilizzare e costruire modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti;
 - sviluppare un atteggiamento positivo verso la Matematica, imparando a vederla come prodotto culturale fortemente unitario e operativo;
- l'invito a realizzare attività di carattere laboratoriale, in particolare si precisa che è necessario che gli studenti imparino a utilizzare le tecnologie oggi disponibili al fine di costruire significati degli oggetti di studio mediante l'esplorazione di ambiti di contenuto



in ambienti che consentano di operare con rappresentazioni diversificate e ricche degli oggetti matematici;

- l'opportunità di prestare maggiore attenzione alla semantica piuttosto che alla sintassi: la raccomandazione, esplicita nelle *Indicazioni per i Licei*, è "Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, saranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici sarà strettamente funzionale alla comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina";
- la necessità di coerenza e continuità nello sviluppo dei percorsi di insegnamento e apprendimento, indispensabile per il raggiungimento di vere e solide competenze e per poter affrontare le necessarie discontinuità che caratterizzano ogni percorso di apprendimento su lunghi periodi.

Nelle prove INVALSI compaiono in modo pervasivo e puntuale questi elementi che caratterizzano, nelle indicazioni per i curricula, la continuità fra i contenuti proposti per i diversi gradi scolari:

- innanzitutto gli ambiti di contenuto: quelli esplicitati nelle diverse indicazioni sono gli stessi ambiti nei quali si articolano le prove di Matematica. Essi costituiscono un primo elemento di classificazione delle domande e di organizzazione della restituzione dei risultati;
- in secondo luogo i Traguardi di competenza: quelli a cui le prove INVALSI fanno riferimento sono gli stessi traguardi esplicitati nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* o costruiti da INVALSI per il secondo ciclo⁶. I Traguardi di competenza sono considerati un elemento ineludibile nella formulazione delle domande e nella elaborazione delle prove e costituiscono un altro elemento nella classificazione delle domande;
- infine gli aspetti semantici, l'argomentazione, la coerenza e la continuità fra i contenuti dei diversi gradi scolari sono oggetto di attenzione costante come parte essenziale del lavoro di preparazione di tutte le prove.

Oltre alla coerenza con le indicazioni curriculari le prove INVALSI presentano una forte continuità tra i diversi gradi scolari che si caratterizza per diverse specificità, fra cui ricordiamo:

- l'identità dei diversi ambiti (Dati e Previsioni, Numeri, Relazioni e Funzioni, Spazio e Figure);
- le tre dimensioni *Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare* (descritte nel paragrafo 4) che contribuiscono a descrivere le competenze matematiche valutate mediante le prove INVALSI;
- la presenza di Traguardi specifici per lo sviluppo delle competenze, traguardi che si articolano per integrazione o riformulazione nel passaggio da un grado al successivo, prefigurando quindi uno sviluppo diacronico della competenza matematica caratterizzato da una forte continuità, nonostante le inevitabili differenze e specificità

⁶ Per la scuola secondaria di secondo grado non sono previsti, dalla normativa vigente, Traguardi per lo sviluppo delle competenze. Il gruppo di lavoro INVALSI ha individuato una serie di Traguardi per lo sviluppo delle competenze in diretta continuità con i Traguardi della fine del primo ciclo (vedi Allegato A)



che contraddistinguono ogni percorso di apprendimento che si struttura su un lungo periodo temporale;

- la presenza di specifici contenuti matematici comuni e di competenze a essi legate. In particolare, senza la pretesa di essere esaustivi nell'elencazione, citiamo alcune conoscenze e abilità richieste per affrontare i quesiti proposti, che sono presenti nelle prove di tutti i gradi scolari: leggere dati rappresentati mediante tabelle e diagrammi (a barre, circolari, ideogrammi); ordinare numeri e operare con essi; utilizzare proprietà di figure geometriche; individuare e utilizzare rapporti di scala; utilizzare il linguaggio simbolico.

Naturalmente la continuità in termini di contenuti specifici e di conoscenze e abilità a essi legate si caratterizza in modo nettamente più marcato nel passaggio da un grado scolare al successivo, tanto è vero che diverse domande delle prove del Grado 5 possono essere utilizzate per le prove del Grado 8; allo stesso modo molte domande delle prove del Grado 8 possono essere utilizzate per valutare competenze degli studenti del Grado 10 e così via.

In particolare, limitandoci a considerare le domande delle prove dei gradi 8 e 10, osserviamo che, per esempio, alcune di quelle relative ai concetti di percentuale, relazione funzionale fra grandezze, distribuzione statistica, area di una figura, rappresentazione polinomiale dei numeri, divisibilità, probabilità, trasformazione geometrica, sono assai simili fra loro, tanto da poter essere proposte sia nelle prove del Grado 8 sia in quelle del Grado 10.

3.4. Le prove INVALSI e le competenze matematiche

Come scritto esplicitamente anche nelle *Indicazioni per il primo ciclo*, “Il sistema di valutazione nazionale ha il compito di rilevare la qualità dell'intero sistema scolastico, fornendo alle scuole, alle famiglie e alla comunità sociale, al Parlamento e al Governo elementi di informazione circa la salute e la criticità del nostro sistema di istruzione. L'Istituto di valutazione rileva e misura gli apprendimenti con riferimento ai traguardi e agli obiettivi previsti dalle Indicazioni, promuovendo, altresì, una cultura della valutazione che scoraggi qualunque forma di addestramento finalizzata all'esclusivo superamento delle prove. La promozione, insieme, di autovalutazione e valutazione costituisce la condizione decisiva per il miglioramento delle scuole e del sistema di istruzione poiché unisce il rigore delle procedure di verifica con la riflessione dei docenti coinvolti nella stessa classe, nella stessa area disciplinare, nella stessa scuola od operanti in rete con docenti di altre scuole. Nell'aderire a tale prospettiva, le scuole, al contempo, esercitano la loro autonomia partecipando alla riflessione e alla ricerca nazionale sui contenuti delle Indicazioni entro un processo condiviso che potrà continuare nel tempo, secondo le modalità previste al momento della loro emanazione, nella prospettiva del confronto anche con le scuole e i sistemi di istruzione europei”.

Emerge chiaramente, nel passo precedente, che solo l'azione coordinata del Sistema Nazionale di Valutazione (che, con la rilevazione e la misura degli apprendimenti, attraverso prove standardizzate, fornisce alle scuole informazioni sulle criticità del nostro sistema di istruzione) e delle scuole (che devono avviare una riflessione sulle informazioni di cui entrano in possesso per avviare azioni utili a migliorare l'offerta formativa) può conseguire l'obiettivo



di favorire l'insegnamento-apprendimento della matematica e di raggiungere gli obiettivi in termini di traguardi per le competenze.

In questo senso va sottolineato che il riferimento alle diverse indicazioni è inteso in senso globale e non solo puntuale. I diversi documenti alla base della predisposizione delle prove (*Indicazioni nazionali per il primo ciclo, Indicazioni nazionali per il sistema dei Licei, Linee Guida per l'Istruzione Tecnica e Professionale*) contengono tutti un forte ed esplicito riferimento (derivante dalla loro comune origine dagli Assi culturali per l'obbligo di istruzione) alla matematica come elemento fondamentale per le competenze di cittadinanza e per le competenze per la vita (*Life skills*). Ogni prova viene quindi costruita pensando non solo agli apprendimenti specifici di quel grado scolastico, ma anche alle competenze generali e permanenti che lo studente, in quello specifico grado scolastico, dovrebbe aver acquisito grazie a tutto il percorso precedente. Le prove possono quindi contenere domande che accertano il permanere di abilità o di conoscenze acquisite in gradi scolari precedenti, la cui padronanza è essenziale per l'esercizio di queste competenze.

Quanto appena detto è fondamentale per chiarire limiti e compiti dell'azione del sistema di valutazione, in particolare attraverso l'uso di prove standardizzate. Questo strumento, che risulta particolarmente utile a dare informazioni su alcune criticità del sistema nel suo complesso, è poco adatto a misurare il conseguimento di alcuni dei Traguardi per il raggiungimento delle competenze elencati nelle Indicazioni. Per esempio mentre le prove standardizzate sono uno strumento utile per valutare i traguardi "Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure" e "Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza", possono essere meno adeguate a valutare pienamente un traguardo come "Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri" e sono sicuramente non adeguate a valutare il traguardo "Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica".

In questo senso le prove standardizzate non devono né possono sostituirsi all'azione dell'insegnante per la valutazione degli studenti della propria classe: i risultati delle prove possono essere utilizzati come una fra le molte informazioni di cui l'insegnante deve entrare in possesso per valutare dinamicamente le prestazioni dei propri studenti e certificare le competenze raggiunte, ma non possono costituire l'unica sorgente di informazioni né quella più importante per la valutazione del singolo alunno, essenzialmente per tre motivi:

- le prove standardizzate, come già detto, non possono misurare né tantomeno valutare il conseguimento di traguardi caratterizzati da aspetti metacognitivi o non cognitivi, come per esempio "Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà"; analogamente, almeno come sono attualmente strutturate, le prove standardizzate non consentono di valutare la competenza raggiunta dagli studenti nell'uso di tecnologie per costruire significati degli oggetti di studio;
- le prove standardizzate sono poco adatte a valutare pienamente il conseguimento di competenze nel: produrre congetture; sostenere argomentazioni e dimostrazioni complesse; porsi e risolvere problemi di una certa difficoltà e complessità, che



richiedono diversi passi per essere affrontati e risolti; costruire e utilizzare modelli per situazioni complesse;

- le prove standardizzate tendono a porre domande per le quali la correzione delle risposte è indipendente da chi la effettua; in altri termini tendono, per quanto possibile, a eliminare ogni elemento di soggettività. Invece la valutazione che l'insegnante fa delle competenze conseguite da uno studente non può non essere soggettiva, dipendente anche da fattori sociali e affettivi, e tesa anche a promuovere l'acquisizione stessa delle competenze: tanto più è soggettiva, tanto più diventa adatta allo studente che viene valutato e quindi ricca e significativa per quello studente.

D'altra parte la possibilità di avere informazioni su diversi aspetti dell'apprendimento, confrontabili con le informazioni sugli stessi aspetti relative a gruppi di studenti simili fra loro come background socio-economico-culturale o contesto geografico, è uno strumento in mano a ogni insegnante per valutare (nel senso più ampio della parola) in modo più completo i propri allievi e migliorare continuamente la propria azione didattica. Le prove INVALSI possono quindi fornire importantissime informazioni di sistema con cui l'insegnante si può confrontare e di cui si può avvalere per la valutazione individuale.



4. La struttura delle prove

4.1 Le caratteristiche generali delle prove e le tipologie delle domande

Le prove di matematica delle Rilevazioni Nazionali dell'INVALSI, nella versione cartacea, sono costituite da fascicoli comprendenti domande che possono essere articolate in diversi item. L'ordine delle domande e delle opzioni di risposta può variare, con determinati vincoli, all'interno dei diversi fascicoli presentati agli studenti. Nella versione CBT sono costituite da *forme* comprendenti domande che possono essere articolate in diversi *item* provenienti dalla banca costituita per lo specifico grado scolastico. Il numero complessivo di *item* può variare da un anno all'altro e da un grado all'altro.

Ogni domanda è costruita con un preciso *scopo della domanda* che definisce in modo specifico, anche in termini di conoscenze, che cosa si vuole principalmente valutare con quella domanda. Ogni domanda è inoltre esplicitamente collegata a un Traguardo di competenza (si veda l'allegato 6.1).

Le prove di matematica sono costituite da quesiti di diverse categorie: a risposta chiusa, a risposta aperta univoca, a risposta aperta articolata, *cloze*, associazione. Queste categorie possono poi presentarsi, nel caso delle prove CBT, attraverso diverse forme di interazione con lo strumento di somministrazione.

La prima categoria consiste in quesiti a scelta multipla che presentano quattro opzioni di risposta (tre nel grado 2), una sola delle quali è corretta e quesiti a scelta multipla complessa che richiedono la determinazione del valore di verità di alcune proposizioni.

I quesiti a "risposta aperta univoca" sono domande che richiedono, per esempio, il risultato di un calcolo algebrico o numerico.

I quesiti a "risposta aperta articolata" possono richiedere semplici argomentazioni, giustificazioni, sequenze di calcoli. Per questi quesiti viene fornita una griglia di correzione articolata, costruita in base alle risposte ottenute nel pretest. La griglia di correzione prevede anche la categoria delle risposte *accettabili*: risposte che non sono propriamente corrette ma dalle quali si evince che lo studente ha risposto adeguatamente, considerando lo specifico *scopo della domanda*. Queste domande, nelle prove cartacee, vengono corrette dai singoli insegnanti; invece per quanto riguarda le prove CBT, la correzione è effettuata centralmente dall'INVALSI.

I quesiti di tipo "*cloze*" richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni mediante l'utilizzo di elementi forniti nel testo.

I quesiti di tipo "associazione" richiedono di individuare la corrispondenza corretta fra elementi di due insiemi dati.

La divisione dei contenuti matematici in ambiti è ormai condivisa a livello internazionale: ogni domanda è classificata in un determinato ambito, che è sempre da considerarsi solo come l'ambito *prevalente* (e non esclusivo) di riferimento.

Nella costruzione delle domande si tiene conto anche di una direzione trasversale ai contenuti, che si riferisce ai possibili processi messi in atto per rispondere alle domande. Questa direzione trasversale è stata definita a partire dalle indicazioni curricolari e in particolar modo



dai Traguardi per lo sviluppo delle competenze. Il gruppo di lavoro INVALSI sulle prove di Matematica ha quindi individuato un possibile raggruppamento secondo tre dimensioni denominate: *Risolvere problemi*, *Argomentare*, *Conoscere*. Le tre dimensioni derivano inoltre da riflessioni su aspetti ed elementi salienti delle attività matematiche e su risultati della ricerca in didattica della matematica, nonché da una accurata analisi delle prove fino a ora somministrate e dei loro risultati.

Risolvere problemi e Argomentare

Le diverse attività matematiche si possono aggregare attorno a due aspetti in rapporto fra loro: la risoluzione di problemi (interni alla matematica o applicativi) e l'argomentazione, nelle sue diverse specificazioni e articolazioni: dall'accertare la ragionevolezza di un'affermazione, al validarla con riferimento a una teoria; dal controllare la correttezza di un risultato, al giustificare la sua adeguatezza in relazione al problema affrontato. Il rapporto fra la risoluzione di problemi e l'argomentazione dipende dal fatto che la costruzione di un'argomentazione è in molti casi una attività di autentico *problem solving* e, d'altra parte, il *problem solving* richiede in genere attività di validazione intermedie e finali di tipo argomentativo. La centralità assunta dal *problem solving* e dall'argomentazione nella formazione e nella ricerca educativa in campo matematico è stata anche una conseguenza di un dato storico inconfutabile: il fatto che calcolatrici e computer mettono a disposizione notevoli risorse per svolgere in modo assai efficace ed economico tutte le attività matematiche di tipo esecutivo e insieme evidenziano la necessità di sviluppare competenze di decisione, di scelta e di controllo, che rimangono prerogative umane. Nelle prove CBT vengono messi a disposizione strumenti di calcolo specificatamente pensati per poter proporre domande il cui focus è direttamente la valutazione dell'argomentazione e del *problem solving*.

Per quanto riguarda i problemi, è bene avere chiaro il fatto che attraverso le prove standardizzate è difficile accertare una competenza importante come l'orientarsi in una situazione problematica fino a individuare il problema da affrontare (*problem posing*) ed è anche difficile accertare la capacità di affrontare un problema "grezzo" procurandosi i dati necessari per risolverlo. Come già detto questo rappresenta uno dei limiti per le competenze accertabili con le prove standardizzate.

Per quanto riguarda la dimensione *Argomentare* la scelta dell'affermazione corretta e l'individuazione della sua giustificazione tra quelle proposte è oggetto di valutazione nelle prove INVALSI. Più arduo appare proporre quesiti che richiedono di scegliere l'affermazione corretta e di produrre una giustificazione per essa. Ancora più arduo, per non dire impossibile allo stato attuale di elaborazione delle prove, appare accertare la capacità di produrre e poi giustificare un'affermazione a partire da un quesito aperto del tipo "ipotizzare e verificare" e, più in particolare, del tipo "congetturare e dimostrare". Questo determina un altro limite per le competenze accertabili con le prove standardizzate nelle aree del *Risolvere problemi* e dell'*Argomentare*.



Conoscere

Le due attività matematiche *Risolvere problemi* e *Argomentare* richiedono conoscenze su oggetti matematici tradizionalmente definiti come “concetti”, segni e sistemi di segni, algoritmi e tecniche di trattamento oltre alla capacità di farne uso stabilendo connessioni fra essi. In questo senso possiamo parlare di competenze strumentali al *problem solving* e all’argomentazione che devono essere accertate proprio per questo carattere di strumentalità necessaria allo svolgimento di compiti più complessi. Gli studi su che cosa significa e come si realizza la padronanza degli oggetti matematici nella ricerca in didattica della matematica si sono sviluppati in parallelo, e spesso in interazione, con le ricerche nelle scienze dell’educazione. A partire dall’analisi delle competenze necessarie per affrontare compiti professionali specifici, condotta negli anni ‘70, le competenze sono state progressivamente identificate come “unità” di conoscenze e capacità e intenzione di farne uso per affrontare compiti. Oggi riguardano anche i sistemi di formazione, inclusa la scuola, che sono investiti del compito di sviluppare e accertare, nel caso della scuola italiana di *certificare*, competenze e non solo conoscenze.

Nel tentativo di raggruppare competenze nelle tre dimensioni del *Conoscere*, del *Risolvere problemi* e dell’*Argomentare* è inoltre necessario tener conto di un aspetto trasversale alle tre dimensioni, che riguarda l’attività semiotica in Matematica. Il lavoro matematico si esercita attraverso segni verbali e non verbali (espressioni algebriche, figure geometriche, grafi, grafici, schemi, ecc.); essi sono presenti, con funzioni specifiche diverse, nei processi e nei prodotti dell’attività matematica, nel lavoro individuale e nell’interazione tra le persone impegnate nel risolvere un problema. L’attività semiotica assume tuttavia caratteristiche assai diverse nelle tre dimensioni in sede di accertamento delle competenze. Queste diversità giustificano la scelta di non aggregare traguardi e competenze secondo una dimensione semiotica (il rappresentare) peraltro pervasiva. La somministrazione CBT permette di arricchire la tavolozza semiotica delle domande che possono venire proposte agli studenti, anche avvicinandole a situazioni reali di utilizzo delle competenze matematiche in contesti diversi.

Durante le prove può essere previsto (a seconda del grado e della modalità di somministrazione) l’uso della calcolatrice (a condizione che essa non sia quella dei telefoni cellulari e che non sia collegabile alla rete internet né direttamente né mediante qualsiasi altro strumento, con tecnologie wireless come Bluetooth, Wi-Fi, ...) e l’uso di strumenti da disegno (riga, squadra, compasso, goniometro). L’evoluzione delle prove verso la modalità CBT prevede anche un’evoluzione progressiva degli strumenti a disposizione degli studenti. Nelle prove CBT la calcolatrice è integrata nello strumento di somministrazione, così come strumenti di editing matematico. È possibile che per certe prove sia fornito un *formulario*. Per ogni prova viene indicato esplicitamente il tempo a disposizione.

4.2 La produzione delle domande e delle prove

Nel complesso il percorso di produzione di una prova dura dai due ai tre anni e inizia con la produzione delle domande da parte degli autori, che sono tutti insegnanti o dirigenti del sistema nazionale di istruzione. La formulazione delle domande avviene individualmente e in gruppo.



Nel processo di formulazione gli autori sono affiancati da esperti e per gli autori vengono organizzati periodicamente seminari di formazione.

Con le domande prodotte sono preparate le prove per i pretest. Le prove sono assemblate da gruppi di lavoro, uno per ogni grado, composti da insegnanti, dirigenti, ricercatori, esperti INVALSI. I gruppi di lavoro procedono anche alla revisione linguistica e alla sistemazione grafica. Un gruppo di coordinamento, costituito anch'esso da insegnanti, dirigenti, ricercatori, esperti INVALSI, sovrintende alla coerenza complessiva del sistema delle prove, curando i necessari collegamenti concettuali verticali e la coerenza con le Indicazioni nazionali dei diversi ordini scolastici.

Le domande sono costruite con l'obiettivo di essere chiaramente comprese nel loro scopo. Per questo è posta un'attenzione particolare ai diversi aspetti della loro formulazione linguistica: in questo modo si cerca di evitare che una non necessaria difficoltà di tipo linguistico renda meno precisa l'informazione restituita relativa alla competenza matematica.

Per quanto riguarda gli aspetti lessicali vengono evitati accuratamente tutti i termini che hanno una connotazione regionale o dialettale; soprattutto nelle classi della scuola primaria il ricorso a termini non presenti nel vocabolario di base è limitata ai casi strettamente indispensabili e, quando necessario, essi vengono chiariti o definiti. I termini tecnici specifici della matematica vengono utilizzati coerentemente con le conoscenze tecnico-terminologiche delle classi testate, evitando i tecnicismi inutili. Dal punto di vista sintattico le domande cercano di preferire forme semplici, sempre con l'obiettivo della massima chiarezza e intelligibilità del testo e in particolar modo della consegna. Una struttura sintattica complessa è giustificata solo quando è necessaria per esprimere una complessità di situazioni. I contesti scelti per le domande possono essere di tipo scientifico o relativi alla comune esperienza degli studenti. In generale i contesti devono essere significativi relativamente alla Matematica che vi viene coinvolta.

Le tabelle con i dati utilizzate nelle domande provengono, se possibile, da vere basi di dati; possono essere eventualmente semplificate o adattate. Le immagini sono utilizzate quando contengono elementi importanti o informazioni o se aiutano l'allievo (soprattutto nella scuola primaria) a formarsi un'immagine mentale della situazione.

Le prove sono costruite assemblando in maniera equilibrata domande classificate nei diversi ambiti, nelle diverse dimensioni e per le quali i pretest abbiano indicato capacità di fornire informazioni significative lungo tutta la scala delle abilità degli studenti.

La costruzione della prova in formato cartaceo della scuola primaria

Per la scuola primaria i fascicoli delle prove (somministrati in forma cartacea) sono composti da un numero variabile di domande. Le prove per il Grado 2 sono formate da un numero di domande inferiore a quelle per il Grado 5 per evidenti ragioni che tengono conto dell'età degli studenti coinvolti e delle competenze che hanno sviluppato nel loro percorso scolastico. Il numero di domande può variare da un anno all'altro relativamente alle caratteristiche dei quesiti scelti, ma l'intervallo in cui varia è costante: per il grado 2 il numero di domande può essere compreso tra 20 e 28 (e il numero di item può essere compreso tra 24 e 34), mentre per



il Grado 5 il numero di domande può essere compreso tra 30 e 40 (e il numero di item può essere compreso tra 40 e 50).

In linea con le Indicazioni Nazionali, le domande del Grado 2 riguardano gli ambiti Numeri, Spazio e Figure, Dati e Previsioni, e le domande del Grado 5 Numeri, Relazioni e Funzioni, Spazio e Figure, Dati e Previsioni. La composizione dei fascicoli per la scuola primaria mantiene un equilibrio tra gli ambiti di contenuto, a volte lasciando all'ambito Numeri uno spazio leggermente superiore rispetto agli altri.

La costruzione della prova in formato CBT della scuola secondaria⁷

Per la scuola secondaria di primo e secondo grado la somministrazione delle prove in formato CBT richiede una diversa impostazione del disegno della rilevazione e di conseguenza del pretest.

Questa nuova impostazione richiede non di costruire una prova lineare uguale per tutti, ma di costruire una banca di item che consenta di avere tante forme diverse del test assemblate in base a una serie di vincoli opportunamente stabiliti. Infatti nelle rilevazioni su larga scala in ambito educativo, le variabili indagate sono tipicamente di ampio respiro e il numero di item richiesti per poter descrivere il livello di preparazione posseduto da un allievo in una fase del percorso scolastico è molto elevato. Nel caso di scale articolate in livelli, inoltre, è opportuno che ci sia un sufficiente numero di item per ognuno dei livelli che si dovranno descrivere in modo che sia possibile esplicitare quello che uno studente conosce e sa fare a ciascun livello.

In letteratura le definizioni di *item bank* sono molteplici, più o meno restrittive. Numerosi autori con il termine *item bank* intendono grandi collezioni di item con un buon funzionamento da un punto di vista psicometrico, dei quali sono note le proprietà misuratorie e sono registrate le caratteristiche considerate rilevanti in funzione degli obiettivi prefissati.

Il modello di Rasch, adottato da INVALSI, fa riferimento a una definizione più restrittiva di banca (Choppin, 1976), intesa come insieme accuratamente costruito di item, calibrati sulla stessa scala, che sviluppano, definiscono e "quantificano" un costrutto comune.

Da una banca di item sviluppata secondo il modello di Rasch possono dunque essere create forme del test che producono misure equivalenti e gli esiti conseguiti da soggetti che rispondono a sottoinsiemi di item tratti dalla stessa banca possono essere direttamente confrontati. Dunque è possibile confrontare i rispondenti anche se il loro punteggio non deriva dallo stesso test o da forme strettamente parallele dello stesso test. Tutti i rispondenti e tutti gli item sono collocati su una stessa scala, che non è definita esclusivamente sulla base del sottoinsieme di item a cui un soggetto ha risposto direttamente, ma da tutti gli item che fanno parte della banca.

L'intero processo, fino alla descrizione dei livelli, è rappresentato sinteticamente in Figura 2.

⁷ Tratto e adattato dal documento I livelli per la descrizione degli esiti delle prove INVALSI, https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2018/Livelli_INVALSI_g8.pdf, pagg. 9-13

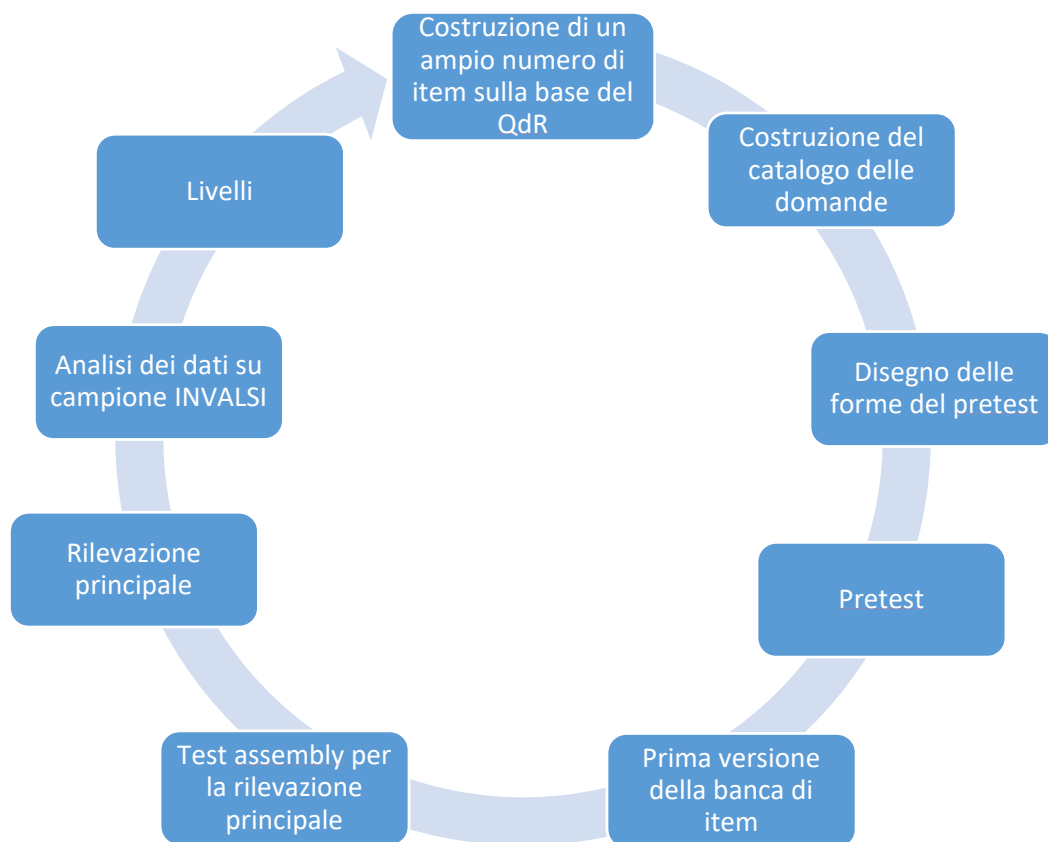


Figura 2: Dalla banca degli item all'individuazione e descrizione dei livelli INVALSI 2018



5. Le prove INVALSI nel panorama internazionale

Le principali indagini internazionali che rilevano competenze e conoscenze di Matematica con cui il quadro di riferimento INVALSI condivide diversi aspetti sono: l'indagine della IEA denominate TIMSS⁸ (*Trends in Mathematics and Science Study*) e TIMSS Advanced e l'indagine dell'OCSE denominata PISA⁹ (*Programme for International Student Assessment*).

Il TIMSS si rivolge agli studenti del quarto e dell'ottavo anno di scolarità e si svolge ogni quattro anni. L'indagine TIMSS Advanced valuta le prestazioni degli studenti all'ultimo anno di scuola secondaria superiore in "Matematica avanzata"¹⁰ e in Fisica. Il PISA, invece, si rivolge agli studenti quindicenni, si svolge ogni 3 anni e ha avuto come ambito principale la Matematica nel 2003 e nel 2012 e l'avrà di nuovo nel 2021. Tutte queste indagini non si riferiscono soltanto alla Matematica, ma anche alle Scienze e, nel caso del PISA, anche alle competenze di lettura, di *problem solving* e di *financial literacy*.

Il TIMSS e il PISA indagano il livello di apprendimento degli studenti in Matematica secondo due prospettive completamente diverse.

Il TIMSS utilizza il "curricolo", nel senso più ampio del termine, come principale concetto organizzatore per comprendere le strategie didattiche impiegate e individuare i fattori che possono influenzarne l'efficacia. Nell'indagine vengono usate tre distinte nozioni di curricolo: curricolo previsto, curricolo realizzato e curricolo appreso. Partendo da questo modello, TIMSS utilizza le prove per rilevare i livelli di rendimento degli studenti nei vari Paesi (curricolo appreso) in Matematica; tramite i questionari, TIMSS raccoglie informazioni dettagliate sulle opportunità di apprendimento offerte agli studenti (curricolo realizzato). Per mezzo dell'*Encyclopedia* e del questionario sui curricoli, TIMSS mette a disposizione informazioni sul livello di preparazione degli studenti in Matematica stabilito e atteso a livello centrale in ciascun Paese (curricolo previsto).

Le prove sono costruite tenendo conto di due diverse dimensioni: i domini di contenuto e i domini cognitivi. I domini di contenuto sono gli argomenti valutati in Matematica: numeri, geometria, algebra (solo per il grado 8) e dati e probabilità. I "domini cognitivi" sono definiti nel TIMSS come i processi di pensiero che ci si aspetta gli studenti mettano in atto ogni qualvolta essi lavorano con la Matematica:

- conoscenza (*knowing*): comprende fatti, concetti e procedure che gli studenti devono conoscere;
- applicazione (*applying*): riguarda la capacità degli studenti di applicare conoscenze e concetti acquisiti per risolvere problemi o rispondere a domande;

⁸ Quadro di riferimento dell'indagine TIMSS 2015 per la matematica:

<http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>

⁹ Quadro di riferimento dell'indagine PISA 2012 per la matematica:

<http://www.INVALSI.it/INVALSI/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf>

¹⁰ L'Italia ha partecipato nel 2015 con un campione di studenti di Licei Scientifici e Istituti Tecnici Tecnologici



- ragionamento (*reasoning*): va oltre la soluzione di problemi di routine per includere situazioni poco familiari agli studenti, contesti complessi e problemi risolvibili in diversi passaggi.

È importante sottolineare che TIMSS valuta una serie di situazioni di *problem solving* all'interno della Matematica, con circa due terzi dei quesiti che richiedono agli studenti di utilizzare l'applicazione e il ragionamento. I domini cognitivi sono gli stessi per entrambi i gradi, ma il peso che essi hanno è diverso nei due gradi. Rispetto al grado 4, il grado 8 pone un'enfasi minore sul dominio della conoscenza e una maggiore su quello del ragionamento.

L'indagine PISA, invece, ha l'obiettivo generale di verificare se, e in che misura, i giovani che escono dalla scuola dell'obbligo abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita. Quindi, il PISA¹¹ non è interessato ai diversi curricula scolastici, ma vuole indagare fino a che punto gli studenti siano in grado di utilizzare quanto hanno appreso a scuola per risolvere problemi collegati alla vita quotidiana (*literacy* matematica). La definizione di *literacy* matematica identifica il ragionamento matematico come uno dei suoi aspetti fondamentali. Il contributo apportato dal framework PISA 2021, rispetto a quelli precedenti, è di evidenziare la centralità del ragionamento matematico per il ciclo di *problem solving* e per la *literacy* matematica in generale.

Le prove sono costruite a partire da quattro diversi aspetti:

- il contenuto matematico: quantità, spazio e forme, cambiamento e relazioni e incertezza e dati;
- il contesto nel quale il quesito è situato: personale, occupazionale, scientifico e pubblico;
- i processi matematici che si riferiscono ai tre momenti fondamentali dell'attività di risoluzione di un problema (*processes*), cioè a quello che un individuo fa per collegare il contesto di un problema alla matematica e quindi per risolverlo:
 - formulare (*formulating*): riconoscere ed identificare le opportunità di utilizzare la matematica in situazioni problematiche ed esprimere il problema contestualizzato in una forma matematica
 - utilizzare (*employing*): effettuare calcoli e manipolazioni e applicare i concetti e i fatti che si conoscono per arrivare ad una soluzione matematica di un problema formulato matematicamente
 - interpretare (*interpreting*): riflettere in modo efficace su soluzioni e conclusioni matematiche, interpretandole nel contesto di un problema della vita reale, e determinare se i risultati o le conclusioni a cui si è giunti siano ragionevoli.

¹¹ Alla base dell'indagine OCSE-PISA è la definizione di *mathematical literacy*, che nel framework per l'indagine 2021 è così esplicitata: "la capacità di un individuo di ragionare matematicamente e di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti del mondo reale. Essa include concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo e a formulare giudizi e decisioni ben fondati, come richiesto a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi del 21° secolo". Cfr. PISA 2021 Framework, draft aprile 2018 (<https://www.oecd.org/pisa/pisa-for-development/PISA-D-Assessment-and-Analytical-Framework-Ebook.pdf>).



- le *skills* del 21° secolo su cui la *literacy* matematica si basa e si sviluppa (*critical thinking, creativity, research and inquiry, self-direction, initiative, persistence, information use, system thinking, communication, reflection*).

L'articolazione dei contenuti in ambiti è ormai condivisa a livello internazionale ed è interessante osservare il sostanziale parallelismo fra le scelte operate dall'Italia a partire dai documenti programmatici e le scelte operate a livello internazionale (OCSE-PISA 2021 e TIMSS 2019).

ARTICOLAZIONE DEI CONTENUTI			
SNV - INVALSI	PISA 2021	TIMSS 2019 grado 4	TIMSS 2019 grado 8
Numeri	Quantità	Numero	Numero
Spazio e figure	Spazio e forme	Figure geometriche e misure	Geometria
Dati e previsioni	Incertezza e dati	Rappresentazione dati	Dati e probabilità
Relazioni e funzioni	Cambiamento e relazioni		Algebra

Per quanto riguarda gli aspetti di tipo cognitivo, non esiste per essi un parallelismo come quello presente per i contenuti in quanto le finalità delle rilevazioni sono diverse.

È possibile quindi stabilire collegamenti tra il QdR INVALSI e i Framework di TIMSS e PISA che permettono di integrare le informazioni che le diverse indagini forniscono. Infatti il QdR INVALSI è fortemente legato alle Indicazioni nazionali e alle Linee Guida che contengono sistematicamente una duplice visione della competenza matematica: da una parte gli aspetti di modellizzazione e le applicazioni per leggere, interpretare la realtà e risolvere problemi della vita concreta, così come nel PISA, dall'altra i contenuti articolati per ambiti, i costrutti caratteristici e gli aspetti relativi allo sviluppo dei curricoli, così come per il TIMSS. Sia le indagini internazionali sia le prove INVALSI si stanno orientando verso una somministrazione CBT.



Allegato A - Traguardi e Dimensioni

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.	T1	1
Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.	T2	1
Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.	T3	1
Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).	T4	1
Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.	T5	2
Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.	T6	2
Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.	T7	3
Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.	T8	2
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.	T9	3
Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).	T10	1



Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.	T1	1
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.	T2	1
Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.	T3	2
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.	T4	2
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.	T5	2
Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	T6	2
Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).	T7	3
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.	T8	3
Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ecc.) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.	T9	1
Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienta con valutazioni di probabilità.	T10	2

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di secondo grado¹²	Codifica	Dimensione
Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.	T1	1
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.	T2	1
Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati, anche calcolando indici, per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.	T3	2
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.	T4	2
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	T5	2
Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.	T6	3
Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.	T7	3
Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).	T8	1
Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.	T9	2
Utilizza semplici modelli matematici dati per descrivere situazioni e fenomeni reali.	T10	2
Dati una situazione o un fenomeno reali individua le variabili significative e costruisce un modello matematico adeguato a rappresentarli.	T11	2
Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.	T12	2

¹² Per la scuola secondaria di secondo grado non sono previsti, dalla normativa vigente, Traguardi per lo sviluppo delle competenze. Il gruppo di lavoro INVALSI ha individuato una serie di Traguardi per lo sviluppo delle competenze in diretta continuità con i Traguardi della fine del primo ciclo



La tabella seguente riporta, affiancati, i traguardi dei diversi livelli scolari allo scopo di mostrarne la forte continuità.

Traguardi al termine della Scuola Primaria	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Primo Grado	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Secondo Grado
<p>1. Si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.</p>	<p>1. Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.</p>	<p>1. Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.</p>
<p>2. Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.</p>	<p>2. Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.</p>	<p>2. Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.</p>
<p>3. Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.</p>		
<p>4. Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro, ecc.).</p>		
<p>5. Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.</p>	<p>3. Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.</p>	<p>3. Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati, anche calcolando indici, per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.</p>



Traguardi al termine della Scuola Primaria	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Primo Grado	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Secondo Grado
<p>6. Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.</p>	<p>10. Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienta con valutazioni di probabilità.</p>	<p>12. Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.</p>
<p>8. Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.</p>	<p>4. Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.</p> <p>5. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.</p>	<p>4. Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.</p> <p>5. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.</p>
<p>9. Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.</p> <p>7. Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.</p>	<p>7. Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (per esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).</p> <p>8. Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.</p>	<p>6. Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.</p> <p>7. Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.</p>



Traguardi al termine della Scuola Primaria	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Primo Grado	Traguardi al termine della Scuola Secondaria di Secondo Grado
10. Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ecc.).	9. Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.	8. Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).
	6. Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	9. Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse. 10. Utilizza semplici modelli matematici dati per descrivere situazioni e fenomeni reali. 11. Dati una situazione o un fenomeno reali individua le variabili significative e costruisce un modello matematico adeguato a rappresentarli.



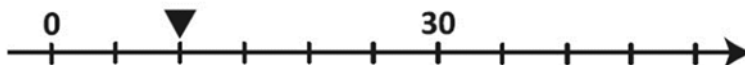
Allegato B - Esempi di domande

I quesiti che seguono sono stati somministrati nelle rilevazioni cartacee o CBT del Servizio Nazionale di Valutazione degli ultimi anni e vengono qui presentati con lo scopo di esplicitare il collegamento tra il QdR e le prove. Sono stati scelti esempi di quesiti di diversi formati (scelta multipla semplice, scelta multipla complessa, risposta univoca, risposta aperta articolata, cloze), appartenenti a ciascuna delle tre dimensioni (Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare). Ogni quesito viene inoltre presentato con una classificazione relativa alle sue caratteristiche (Ambito, Scopo della domanda, Traguardi per lo sviluppo delle competenze, Obiettivi di apprendimento delle Indicazioni nazionali e Linee Guida).

Conoscere

Alla dimensione Conoscere afferiscono prevalentemente quesiti relativi alla padronanza di concetti, metodi, algoritmi e procedimenti. Gli esempi scelti interessano tutti l'ordinamento dei numeri, in alcuni casi rappresentati sulla retta, ed esplicitano una continuità verticale fra gradi scolari diversi.

D2. Osserva questa retta dei numeri.



a. Quale dei seguenti numeri va scritto nel posto indicato dal triangolino?

A. 2

B. 10

C. 20

b. Sulla retta dei numeri disegnata sopra metti al posto giusto il numero 40.

Grado 2 - 2016

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta:

a. B

b.



Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Posizionare numeri sulla retta, dalla posizione al numero e dal numero alla posizione.

Indicazioni Nazionali

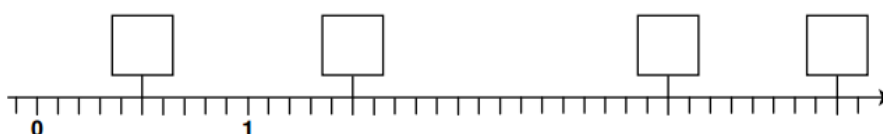
Traguardo: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).

Obiettivi: Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, rappresentarli sulla retta, ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure.



D30. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:

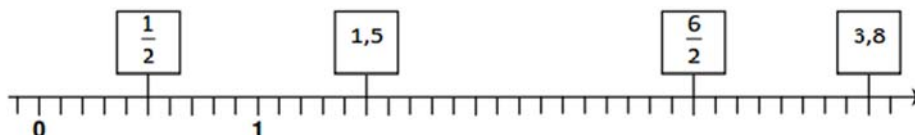
1,5 $\frac{6}{2}$ 3,8 $\frac{1}{2}$



Grado 5 - 2016

Formato: Risposta univoca

Risposta corretta:



Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Conoscere le diverse rappresentazioni dei numeri e saperli posizionare sulla retta dei numeri.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).

Obiettivi: Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.

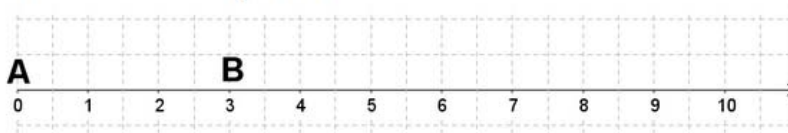


Domanda

Antonio e Bruno camminano contemporaneamente lungo la linea dei numeri.

Antonio (A) parte da 0 e procede verso destra di $\frac{1}{2}$ a ogni passo.

Bruno (B) parte da 3 e procede verso destra di $\frac{1}{4}$ a ogni passo.



A quale numero corrisponde il punto in cui Antonio e Bruno si incontrano?

Per rispondere clicca su una delle alternative.

- A 2
- B 3
- C 6
- D 8

Grado 8- 2018 (CBT)

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta: C

Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Muoversi sulla retta numerica di quantità non intere.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.

Obiettivi: *Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.*



Domanda

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

Per rispondere clicca su una alternativa in ogni riga.

	V	F
1. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $ab < a^2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a^2 < b^2$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $a + b < a$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b < 1$, allora $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Grado 10 – 2018 (CBT)

Formato: Scelta multipla complessa

Risposta corretta: F - V - F - V

Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Determinare il valore di verità di implicazioni relative agli ordinamenti con numeri reali senza conoscerne il valore esatto.

Traguardo: Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.

Indicazioni Nazionali e Linee Guida: Ordinamento dei numeri e loro rappresentazione su una retta. *Rappresentazione geometrica [dei numeri] su una retta.*



Risolvere problemi

Gli esempi scelti fanno riferimento alla dimensione *Risolvere problemi* descritta nel QdR nei quattro ambiti (Numeri, Relazioni e funzioni, Spazio e figure, Dati e previsioni).

D14. La nonna vuole preparare 2 torte.

Per ogni torta ha bisogno di 8 uova.

Qual è il numero minimo di confezioni di uova come questa che la nonna deve comprare?



Risposta: confezioni

Grado 2 – 2018

Formato: Risposta univoca

Risposta corretta: 3

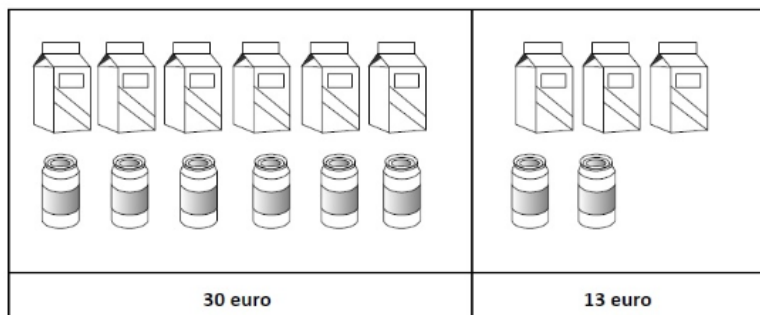
Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Risolvere un problema a struttura moltiplicativa con un vincolo.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.

D22. Osserva la seguente figura.



Completa.

Ogni  costa euro
Ogni  costa euro

Grado 5 - 2016

Formato: Risposta univoca

Risposta corretta:

Ogni  costa 2 euro	Ogni  costa 3 euro
--	--

Ambito: Relazioni e funzioni

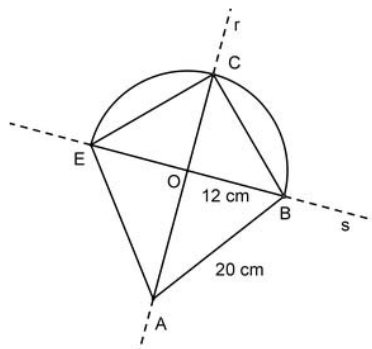
Scopo della domanda: Interpretare e risolvere un problema presentato attraverso immagini.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

Domanda

Nella seguente figura le rette r ed s sono perpendicolari fra loro e l'arco ECB è una semicirconferenza di centro O . La lunghezza del segmento AB è di 20 cm e la lunghezza del segmento OB è di 12 cm.



Qual è l'area del quadrilatero $ABCE$?

Per rispondere clicca su una delle alternative.

- A 320 cm²
- B 336 cm²
- C 480 cm²
- D 672 cm²

Grado 8 - 2018 (CBT)

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta: B

Ambito: Spazio e figure

Scopo della domanda: Risolvere un problema sfruttando le proprietà delle figure geometriche e il teorema di Pitagora.

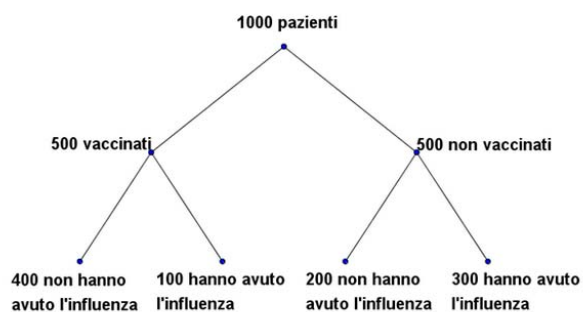
Indicazioni Nazionali

Traguardo: Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.

Obiettivi: *Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure.*

Domanda

Osserva il seguente diagramma ad albero. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza.

**Domanda 2/4**

Qual è la probabilità che una persona scelta a caso dal campione di pazienti abbia avuto l'influenza?

Fai riferimento al diagramma a sinistra e clicca su una delle alternative.

- A 80%
- B 60%
- C 50%
- D 40%

Grado 10 - 2018 (CBT)

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta: D

Ambito: Dati e previsioni

Scopo della domanda: Calcolare una probabilità da un diagramma ad albero.

Traguardo: Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.

Indicazioni Nazionali e Linee guida: Significato della probabilità e sue variazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. *Nozioni di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.*



Argomentare

Gli esempi scelti fanno riferimento alla dimensione *Argomentare* descritta nel QdR nei quattro ambiti (Numeri, Relazioni e funzioni, Spazio e figure, Dati e previsioni). Afferiscono a questa dimensione quesiti nei quali è richiesta la scelta o la produzione di una argomentazione, o il completamento di una dimostrazione.

**D6. La maestra ha comprato 3 sacchetti di palloncini.
In ogni sacchetto ci sono 50 palloncini.
Per la festa della scuola le servono 120 palloncini.**

Quale di queste affermazioni è corretta?

- A. Alla maestra avanzano 20 palloncini
- B. Alla maestra mancano 30 palloncini
- C. Alla maestra avanzano 30 palloncini

Grado 2 - 2016

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta: C

Ambito: Numeri

Scopo della domanda: Riconoscere un'affermazione corretta relativa ad una situazione di problema additivo.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.



D19. Aurora e Giulia stanno giocando con l'acqua e hanno a disposizione un bicchiere, una bottiglietta e una vaschetta di plastica.



Aurora versa l'acqua nella vaschetta vuota usando il bicchiere e scopre che per riempire la vaschetta completamente occorrono 15 bicchieri pieni.

Giulia versa l'acqua nella vaschetta vuota usando la bottiglietta e scopre che per riempire la vaschetta completamente occorrono 5 bottigliette piene.

Giulia dice che occorrono 3 bicchieri pieni per riempire la bottiglietta.

Sei d'accordo con Giulia? Scegli una delle due risposte e completa la frase spiegando le motivazioni della tua scelta.

- Sì, sono d'accordo con Giulia perché.....
.....
.....
- No, non sono d'accordo con Giulia perché.....
.....
.....

Grado 5 - 2017

Formato: Risposta aperta articolata

Risposta corretta- Per esempio: "Sì, sono d'accordo con Giulia perché se servono 5 bottigliette per riempire la vaschetta e la stessa quantità d'acqua è contenuta in 15 bicchieri, a ogni bottiglietta corrispondono 3 bicchieri"

Ambito: Relazioni e funzioni

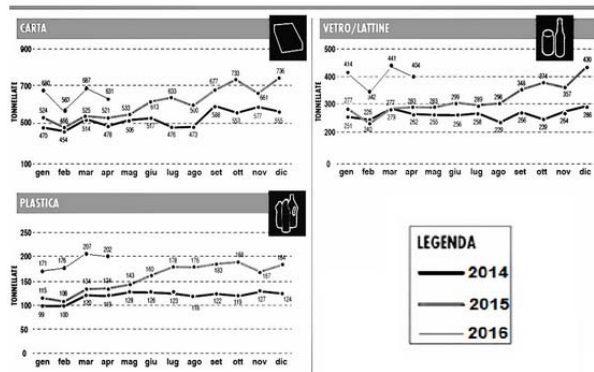
Scopo della domanda: Giustificare un'affermazione stabilendo relazioni tra diverse unità di misura non convenzionali.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri.

Domanda

I seguenti grafici rappresentano i dati della raccolta differenziata dei rifiuti in una città italiana da gennaio 2014 ad aprile 2016.


Domanda 3/3

È possibile affermare che nel 2014 con la raccolta differenziata sono state raccolte meno tonnellate di plastica rispetto al 2015?

Nella tabella che segue indica la sola argomentazione che giustifica la risposta corretta.

Fai riferimento ai grafici a sinistra e clicca su una delle alternative.

Se vuoi cambiare la risposta che hai fornito, deseleziona la risposta data e poi seleziona quella che vuoi dare.

- | Si, è possibile affermarlo | No, non è possibile affermarlo |
|---|---|
| <input type="radio"/> A. perché la linea del 2015 della plastica è sempre sopra quella del 2014 | <input type="radio"/> C. perché in alcuni mesi del 2014 si è raccolta più plastica rispetto a qualche mese del 2015 |
| <input type="radio"/> B. perché la linea del 2015 della plastica è sempre crescente | <input type="radio"/> D. perché la linea del 2014 della plastica non è sempre crescente |

Grado 8 - 2018 (CBT)

Formato: Scelta multipla

Risposta corretta: A

Ambito: Dati e previsioni

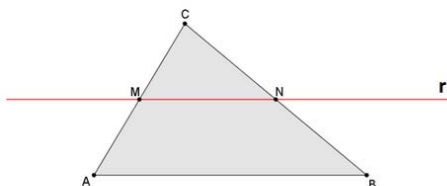
Scopo della domanda: Utilizzare la visione globale di un grafico per scegliere un'affermazione relativa all'andamento di serie storiche.

Indicazioni Nazionali

Traguardo: Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).

Domanda

Sia dato un triangolo ABC . La retta r passa per il punto medio M del lato AC ed è parallela al lato AB .



Si vuole dimostrare che la retta r interseca il lato CB nel suo punto medio N .

Completa il testo di questa dimostrazione scegliendo tra i seguenti termini e prestando attenzione al fatto che ogni termine può essere utilizzato una sola volta.

Per rispondere clicca prima sul termine che vuoi inserire e poi sullo spazio in cui lo vuoi posizionare oppure trascinalo. Per modificare la tua risposta procedi nello stesso modo.

Termini fra cui scegliere:

congruenti
 corrispondenti
 parallele
 Talete
 Euclide
 AM
 perpendicolari
 CN

Considera le rette AB e MN fra loro . Per il teorema di esse intercettano sulle rette AC e CB segmenti fra loro proporzionali. Poiché per ipotesi è congruente a MC allora CN e NB sono il che equivale a dimostrare la tesi.

Grado 10 - 2018 (CBT)

Formato: Cloze

Ambito: Spazio e figure

Risposta corretta: parallele - Talete - AM - congruenti

Scopo della domanda: Completare una dimostrazione distinguendo l'ipotesi dalla tesi e scegliendo le relazioni, le implicazioni e le conoscenze da utilizzare fra quelle proposte.

Traguardo: Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Indicazioni Nazionali e Linee Guida: Il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive. *Concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione.*